



Matrix Theory

10 The four fundamental subspaces

Dr. Konda Reddy Mopuri
Dept. of AI, IIT Hyderabad
July-Nov 2026

From description to action



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- So far, we looked at the definitions: subspace, basis, etc.

From description to action



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- So far, we looked at the definitions: subspace, basis, etc.
- We now compute explicit basis!

From description to action



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- So far, we looked at the definitions: subspace, basis, etc.
- We now compute explicit basis!
- We can't construct by inspection, need systematic procedure.

Subspaces of a matrix we have seen already



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- Column space of A : $C(A)$
- Null space of A : $N(A)$

Column space $C(A)$



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- $A_{m \times n}$

Column space $C(A)$



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- $A_{m \times n}$
- Which vectors in $\mathbb{R}^m$ can be produced by A ?

Column space $C(A)$



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- $A_{m \times n}$
- Which vectors in $\mathbb{R}^m$ can be produced by A ?
- Dimension is the rank r : no. of pivot columns

Null space $N(A)$



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- $A_{m \times n}$

Null space $N(A)$



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- $A_{m \times n}$
- Which vectors in $\mathbb{R}^n$ are sent to zero?

Null space $N(A)$



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- $A_{m \times n}$
- Which vectors in $\mathbb{R}^n$ are sent to zero?
- Dimension is $(n - r)$: no. of free variables

Let's consider A^T



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- $A^T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$

Row space of A : $C(A^T)$



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- Column space of A^T

Row space of A : $C(A^T)$



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- Column space of A^T
- Spanned by the rows of A

Row space of A : $C(A^T)$



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- Column space of A^T
- Spanned by the rows of A
- Dimension is the rank r : no. of independent rows

Left Null space of A : $N(A^T)$



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- Null space of A^T

Left Null space of A : $N(A^T)$



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- Null space of A^T
- $\{y : A^T y = 0\}$

Left Null space of A : $N(A^T)$



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- Null space of A^T
- $\{y : A^T y = 0\}$
- Dimension is $(m - r)$: no. of rows beyond the independent ones

The four subspaces



For $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

Space	Meaning	Lives in	Dimension
$C(A)$	Column space	$\mathbb{R}^m$	r
$N(A)$	Null space	$\mathbb{R}^n$	$n - r$
$C(A^T)$	Row space	$\mathbb{R}^n$	r
$N(A^T)$	Left null space	$\mathbb{R}^m$	$m - r$

Example

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$



The column space: $C(A)$



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

The Null space of A : $N(A)$



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

The row space of A $C(A^T)$



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- Nonzero rows of the echelon matrix form the basis

The row space of A $C(A^T)$



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- Nonzero rows of the echelon matrix form the basis
- $C(A^T) = \text{span of}\{(1, 2, 3), (0, -1, -1)\}$

Left Null space of A $N(A^T)$



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- Solve $A^T y = 0$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Orthogonality of the subspaces



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- Row space is orthogonal to Null space

Orthogonality of the subspaces



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- Row space is orthogonal to Null space
- If $x \in N(A)$, then $Ax = 0$

Orthogonality of the subspaces



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- Row space is orthogonal to Null space
- If $x \in N(A)$, then $Ax = 0$

Orthogonality of the subspaces



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- Row space is orthogonal to Null space
- If $x \in N(A)$, then $Ax = 0$

Orthogonality of the subspaces



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- Row space is orthogonal to Null space
- If $x \in N(A)$, then $Ax = 0$
- $N(A) = C(A^T)^\perp$, equivalently $C(A^T) = N(A)^\perp$

Column space is orthogonal to left null space



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- If $y \in N(A^T)$, then $A^T y = 0 \rightarrow y$ is orthogonal to every column of A

Column space is orthogonal to left null space



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- If $y \in N(A^T)$, then $A^T y = 0 \rightarrow y$ is orthogonal to every column of A
- $N(A^T) = C(A)^\perp$

Four fundamental subspaces



$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & & \mathbb{R}^m \\ C(A^T) & \xrightarrow{A} & C(A) \\ \dim = r & & \dim = r \\ \perp & & \perp \\ N(A) & & N(A^T) \\ \dim = n - r & & \dim = m - r \end{array}$$

$$\mathbb{R}^n = C(A^T) \oplus N(A)$$

$$\mathbb{R}^m = C(A) \oplus N(A^T).$$

In class exercise



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- For a 5×8 matrix of rank 3, what are the dimensions of all four subspaces?

In class exercise



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- For a 5×8 matrix of rank 3, what are the dimensions of all four subspaces?
- If A has full column rank, what is $N(A)$?

In class exercise



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- For a 5×8 matrix of rank 3, what are the dimensions of all four subspaces?
- If A has full column rank, what is $N(A)$?
- If A has full row rank, what is NA^T ?

In class exercise



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- For a 5×8 matrix of rank 3, what are the dimensions of all four subspaces?
- If A has full column rank, what is $N(A)$?
- If A has full row rank, what is NA^T ?
- If A is square and invertible, what are the four subspaces?

Another example

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$



The four subspaces

