



# Matrix Theory

## 07 Column and Null Spaces of a Matrix

Dr. Konda Reddy Mopuri  
Dept. of AI, IIT Hyderabad  
July-Nov 2026

# Column Space



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్  
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद  
Indian Institute of Technology Hyderabad

- All linear combinations of columns of a matrix

# Column Space



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్  
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद  
Indian Institute of Technology Hyderabad

- All linear combinations of columns of a matrix
- Consider the column picture of  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

# Column Space



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్  
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद  
Indian Institute of Technology Hyderabad

- All linear combinations of columns of a matrix
- Consider the column picture of  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- Which all  $b$ 's can  $A$  produce?

# Column Space



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్  
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद  
Indian Institute of Technology Hyderabad

- All linear combinations of columns of a matrix
- Consider the column picture of  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- Which all  $b$ 's can  $A$  produce?
- $Col(A) = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\}$

# Column Space



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్  
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद  
Indian Institute of Technology Hyderabad

- $Col(A) \subseteq \mathbf{R}^m$

# Column Space



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్  
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद  
Indian Institute of Technology Hyderabad

- $Col(A) \subseteq \mathbf{R}^m$
- $Ax = b$  has a solution  $\iff b \in Col(A)$

# Is Column space a subspace?



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్  
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद  
Indian Institute of Technology Hyderabad

# What does $A$ send to zero?



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్  
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद  
Indian Institute of Technology Hyderabad

- For an  $m \times n$  matrix  $A$ , which i/p vectors disappear when multiplied by  $A$ ? i.e.,  $Ax = 0$

# What does $A$ send to zero?



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్  
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद  
Indian Institute of Technology Hyderabad

- For an  $m \times n$  matrix  $A$ , which i/p vectors disappear when multiplied by  $A$ ? i.e.,  $Ax = 0$
- $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$

# What does $A$ send to zero?



- For an  $m \times n$  matrix  $A$ , which i/p vectors disappear when multiplied by  $A$ ? i.e.,  $Ax = 0$
- $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$
- Null space or Kernel of  $A$

# What does $A$ send to zero?



- For an  $m \times n$  matrix  $A$ , which i/p vectors disappear when multiplied by  $A$ ? i.e.,  $Ax = 0$
- $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$
- Null space or Kernel of  $A$
- $N(A) \subseteq \mathbb{R}^n$

# Is Null space a subspace?



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్  
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद  
Indian Institute of Technology Hyderabad



## Vectors in Vector Space

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^m$$

- $Col(A)$  contains all possible outputs.



## Vectors in Vector Space

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^m$$

- $Col(A)$  contains all possible outputs.
- $N(A)$  contains all inputs producing zero output.

# Effect of Row Operations



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్  
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद  
Indian Institute of Technology Hyderabad

- $A \rightarrow U \rightarrow R$

# Effect of Row Operations



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్  
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद  
Indian Institute of Technology Hyderabad

- $A \rightarrow U \rightarrow R$
- $N(A) = N(U) = N(R)$

# Effect of Row Operations



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్  
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद  
Indian Institute of Technology Hyderabad

- $A \rightarrow U \rightarrow R$
- $N(A) = N(U) = N(R)$
- $C(A) \neq C(U) \neq C(R)$



## Column space and Null space

Column space describes what  $A$  can produce; null space describes what  $A$  cannot distinguish from zero.



- How to find every solution of  $Ax = b$ ?