



Matrix Theory

02 Gaussian Elimination

Dr. Konda Reddy Mopuri
Dept. of AI, IIT Hyderabad
July-Nov 2026

Example system of equations



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

$$2u + v + w = 5$$

$$4u - 6v = -2$$

$$-2u + 7v + 2w = 9$$

- Let's solve this!

An intuitive approach



$$2u + v + w = 5$$

$$4u - 6v = -2$$

$$-2u + 7v + 2w = 9$$

- Start subtracting multiples of the first equation from the rest

An intuitive approach



$$2u + v + w = 5$$

$$4u - 6v = -2$$

$$-2u + 7v + 2w = 9$$

- Start subtracting multiples of the first equation from the rest
- Goal: simplify the system via eliminating (or reducing) the variables

An intuitive approach



$$2u + v + w = 5$$

$$4u - 6v = -2$$

$$-2u + 7v + 2w = 9$$

- $R2 \leftarrow R2 - 2 \cdot R1$

An intuitive approach



$$2u + v + w = 5$$

$$4u - 6v = -2$$

$$-2u + 7v + 2w = 9$$

- $R2 \leftarrow R2 - 2 \cdot R1$
- $R3 \leftarrow R3 + 1 \cdot R1$

The Intuitive Approach

$$2u + v + w = 5$$

$$-8v - 2w = -12$$

$$8v + 3w = 14$$

- We proceed to eliminate another variable (v in this case)

The Intuitive Approach

$$2u + v + w = 5$$

$$-8v - 2w = -12$$

$$8v + 3w = 14$$

- We proceed to eliminate another variable (v in this case)
- This time, we need not work with the first equation

The Intuitive Approach



$$2u + v + w = 5$$

$$-8v - 2w = -12$$

$$8v + 3w = 14$$

- We proceed to eliminate another variable (v in this case)
- This time, we need not work with the first equation
- Instead, we start from the second

The Intuitive Approach

$$2u + v + w = 5$$

$$-8v - 2w = -12$$

$$8v + 3w = 14$$

- We proceed to eliminate another variable (v in this case)
- This time, we need not work with the first equation
- Instead, we start from the second
- $R3 \leftarrow R3 + R2$

The Intuitive Approach



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

$$2u + v + w = 5$$

$$-8v - 2w = -12$$

$$8v + 3w = 14$$

- $R3 \leftarrow R3 + R2$

The Intuitive Approach



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

$$2u + v + w = 5$$

$$-8v - 2w = -12$$

$$w = 2$$

- This process is called 'Gaussian Elimination' or 'Elimination'

The Intuitive Approach



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

$$2u + v + w = 5$$

$$-8v - 2w = -12$$

$$w = 2$$

- This process is called ‘Gaussian Elimination’ or ‘Elimination’
- Specifically, the ‘Forward’ part of the elimination

Elimination



$$2u + v + w = 5$$

$$-8v - 2w = -12$$

$$w = 2$$

- Goal of Forward part: (Upper) Triangular system

Elimination



$$2u + v + w = 5$$

$$-8v - 2w = -12$$

$$w = 2$$

- Goal of Forward part: (Upper) Triangular system
- Known as 'Row Echelon Form (REF)'

Elimination

$$2u + v + w = 5$$

$$-8v - 2w = -12$$

$$w = 2$$

- Goal of Forward part: (Upper) Triangular system
- Known as 'Row Echelon Form (REF)'
- Coefficient 2 in $R1$ and -8 in $R2$ are known as 'pivots'

$$2u + v + w = 5$$

$$-8v - 2w = -12$$

$$w = 2$$

- Goal of Forward part: (Upper) Triangular system
- Known as 'Row Echelon Form (REF)'
- Coefficient 2 in $R1$ and -8 in $R2$ are known as 'pivots'
- Pivots find the right multipliers to eliminate (hence can't be zeros)

Elimination



$$2u + v + w = 5$$

$$-8v - 2w = -12$$

$$w = 2$$

- Triangular system can be solved backward

Elimination



$$2u + v + w = 5$$

$$-8v - 2w = -12$$

$$w = 2$$

- Triangular system can be solved backward
- This part is called 'back substitution'

Elimination: Summary



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

Forward elimination produces pivots. It subtracts multiples of each row from the rows below it. This gives us a triangular system. We solve it in the reverse order, substituting each newly computed variable into the equations that are above.

- One way to write down the forward elimination is by including the RHS vector

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & 2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{array} \right]$$

Elimination



- One way to write down the forward elimination is by including the RHS vector
- Perform the same operations on the RHS

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & 2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{array} \right]$$

The breakdown of Elimination



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- When will this process fail?

The breakdown of Elimination



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- When will this process fail?
- When you can't perform the forward or backward operations

The breakdown of Elimination



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- Full set of n pivots $\rightarrow$

The breakdown of Elimination



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- Full set of n pivots $\rightarrow$
- Only one solution; systems is nonsingular

The breakdown of Elimination



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- Full set of n pivots $\rightarrow$
- Only one solution; systems is nonsingular
- If zero appears in pivot position $\rightarrow$

The breakdown of Elimination



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- Full set of n pivots $\rightarrow$
- Only one solution; systems is nonsingular
- If zero appears in pivot position $\rightarrow$
- System might or might not be singular

The breakdown of Elimination



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- Many times a swap of rows can fix this $\rightarrow$ nonsingular

The breakdown of Elimination



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- Many times a swap of rows can fix this $\rightarrow$ nonsingular
- Some times breakdown is unavoidable $\rightarrow$ singular

Example - 1



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

$$u + v + w = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$2u + 2v + 5w = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$4u + 6v + 8w = \underline{\hspace{2cm}}$$

Example - 2



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

$$u + v + w = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$2u + 2v + 5w = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$4u + 4v + 8w = \underline{\hspace{2cm}}$$

Cost of Elimination



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- How many separate arithmetic operations are required for solving a system with n equations in n variables?

Cost of Elimination



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- Let's ignore the RHS for now

Cost of Elimination



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- Let's ignore the RHS for now
- One 'division' is one operation

Cost of Elimination



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- Let's ignore the RHS for now
- One 'division' is one operation
- One 'Multiply-subtract' one operation

Cost of Elimination: first column



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- Step 1: find the right multiplier for each equation via division by the pivot

Cost of Elimination: first column



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- Step 1: find the right multiplier for each equation via division by the pivot
- Step 2: perform 'multiply and subtract' operation

Cost of Elimination: first column



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- Step 1: find the right multiplier for each equation via division by the pivot
- Step 2: perform 'multiply and subtract' operation
- $(n - 1)$ 'division' operations and $(n - 1) \cdot (n - 1)$ 'multiply-subtract' operations

Cost of Elimination: first column



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- Step 1: find the right multiplier for each equation via division by the pivot
- Step 2: perform 'multiply and subtract' operation
- $(n - 1)$ 'division' operations and $(n - 1) \cdot (n - 1)$ 'multiply-subtract' operations
- Total $n(n - 1)$ operations

Cost of Elimination: second column



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- Equations become shorter

Cost of Elimination: second column



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- Equations become shorter
- Step 1: find the right multiplier for each equation via division by the second pivot

Cost of Elimination: second column



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- Equations become shorter
- Step 1: find the right multiplier for each equation via division by the second pivot
- Step 2: perform 'multiply and subtract' operation

Cost of Elimination: second column



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- Equations become shorter
- Step 1: find the right multiplier for each equation via division by the second pivot
- Step 2: perform 'multiply and subtract' operation
- $(n - 2)$ 'division' operations and $(n - 2) \cdot (n - 2)$ 'multiply-subtract' operations

Cost of Elimination: second column



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- Equations become shorter
- Step 1: find the right multiplier for each equation via division by the second pivot
- Step 2: perform 'multiply and subtract' operation
- $(n - 2)$ 'division' operations and $(n - 2) \cdot (n - 2)$ 'multiply-subtract' operations
- Total $(n - 1)(n - 2)$ operations

Cost of Elimination: LHS



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- $n \cdot (n - 1) + (n - 1) \cdot (n - 2) + \dots + 2 \cdot (2 - 1)$

Cost of Elimination: RHS



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- First column:

Cost of Elimination: RHS



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- First column: $(n - 1)$ 'multiply-subtract' operations

Cost of Elimination: RHS



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- First column: $(n - 1)$ 'multiply-subtract' operations
- Second column:

Cost of Elimination: RHS



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- First column: $(n - 1)$ 'multiply-subtract' operations
- Second column: $(n - 2)$ 'multiply-subtract' operations

Cost of Elimination: RHS



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- First column: $(n - 1)$ 'multiply-subtract' operations
- Second column: $(n - 2)$ 'multiply-subtract' operations
- Total =

Cost of back substitution



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- Last equation:

Cost of back substitution



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- Last equation: one division

Cost of back substitution



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- Last equation: one division
- Second from the last:

Cost of back substitution



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- Last equation: one division
- Second from the last: one multiply-subtract and one division

Cost of back substitution



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

- Last equation: one division
- Second from the last: one multiply-subtract and one division
- Total:

Can we simplify the Gaussian elimination further?



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

$$x + 2y = 5$$

$$2x + 3y = 8$$

Rough work



భారతీయ సాంకేతిక విజ్ఞాన సంస్థ హైదరాబాద్
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान हैदराबाद
Indian Institute of Technology Hyderabad

